

Problemi	Categorie	Arit	Alg	Geo/Mis	Log	Comb	Origine
1. Caramelle a volontà	3				Lo		BB
2. Le bandierine	3 4	Ar					UD
3. Automobili e camion	3 4	Ar					BB
4. La gara di nuoto	3 4				Lo		RZ
5. Visita allo zoo	3 4			Geo			LU
6. Sul muro della scuola (I)	4 5			Geo			GE+g.gp
7. Al semaforo	4 5 6	Ar					SI
8. Pavimentazione (I)	5 6	Ar		Geo/Mis			F.int+g.prop
9. I sandali	5 6	Ar			Lo		SR
10. Pulizie	5 6 7	Ar					9RMT+g.prop
11. Giochi sulla spiaggia	5 6 7	Ar			Lo		SI
12. Il prezzo di una penna	5 6 7 8	Ar				Co	BB
13. Sul muro della scuola (II)	6 7 8			Geo			GE+g.gp
14. Il prato di zio Francesco (I)	7 8	Ar		Geo/Mis			g.funz
15. Pavimentazione (II)	7 8 9	Ar		Geo/Mis			F.int+g.prop
16. Il cubo	7 8 9 10			Geo			2°RMT+g.gsp
17. Il kartodromo	8 9 10	Ar		Geo/Mis			SI
18. La saga dei quadrati	8 9 10	Ar	Alg	Geo/Mis			0 ⁰
19. Il prato di zio Francesco (II)	9 10	Ar	Alg	Geo/Mis			g.funz.
20. Gita in bicicletta	9 10		Alg	Geo/Mis			g.funz.
21. Il lingotto	9 10		Alg	Geo/Mis			GPP
22. L'ultima carta	10				Lo		fj

1. CARMELLE A VOLONTÀ (Cat. 3) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Maria ha acquistato caramelle dello stesso tipo ma di tre gusti diversi: alla menta, alla fragola e al limone. Maria ha comprato più caramelle alla fragola che al limone. Ha messo poi tutte le caramelle alla menta in un vaso, tutte le caramelle alla fragola in un altro vaso e tutte le caramelle al limone in un altro vaso ancora.

I tre vasi sono di grandezza differente: uno grande per le caramelle che sono più numerose, uno piccolo per le caramelle che sono meno numerose, e uno medio per le altre caramelle.

Le caramelle al limone non si trovano nel vaso piccolo.

Quale tipo di caramelle ha messo Maria nel vaso grande, nel vaso medio e nel vaso piccolo?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Logica e ragionamento: seriazione

Analisi del compito

- Comprendere dalla lettura del testo, che ci sono tre diverse quantità di caramelle, tre vasi di grandezze differenti e che c'è un legame tra la grandezza dei vasi e il numero delle caramelle in essi contenute.
- Rendersi conto che il vaso piccolo non può contenere le caramelle alla fragola (poiché sono di più di quelle al limone), né le caramelle al limone (che non sono nel vaso piccolo) e quindi deve necessariamente contenere le caramelle alla menta.
- Dedurre infine che le caramelle alla fragola, più numerose di quelle al limone, sono contenute nel vaso grande, mentre le caramelle al limone si trovano nel vaso medio.

Oppure: rendersi conto che le caramelle al limone non possono trovarsi nel vaso piccolo (come scritto nel testo), né nel vaso grande (poiché sono di meno rispetto a quelle alla fragola), e che quindi devono essere nel vaso medio; arrivare così alla stessa conclusione ottenuta sopra.

Oppure: procedere per tentativi, verificando il rispetto delle condizioni e facendo aggiustamenti, se necessario.

Soluzione

Soluzione completa (fragola-vaso grande; limone-vaso medio; menta-vaso piccolo) che mostri una gestione chiara e corretta dei tentativi o ragionamento corretto

Livello: 3

Origine: Bourg-en-Bresse

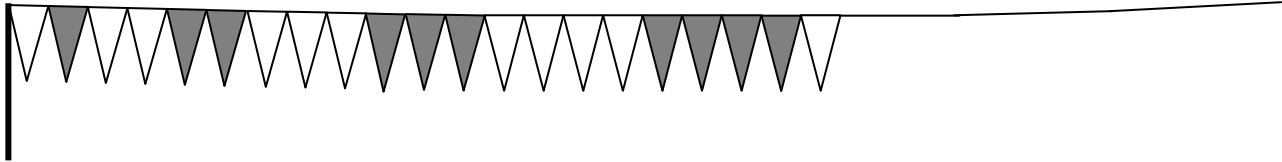
2. LE BANDIERINE (Cat. 3, 4) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Nicola costruisce un festone appendendo ad un filo, una accanto all'altra, bandierine blu e bandierine gialle, tutte della stessa forma e della stessa grandezza.

Comincia ad appendere all'inizio del filo una bandierina gialla, poi accanto sistema una bandierina blu.

Continua con due bandierine gialle e due blu, poi con tre bandierine gialle e tre blu, e così via.

Ecco il disegno dell'inizio del suo festone mentre comincia a sistemare le cinque bandierine gialle, dopo aver disposto le quattro blu:



(Su questo disegno le bandierine gialle sono quelle bianche e le bandierine blu sono quelle grigie).

Quando arriva alla fine del filo, Nicola osserva che ha potuto sistemare esattamente 100 bandierine.

Quante bandierine di ciascun colore ha appeso Nicola al suo filo?

Spiegate come avete fatto a trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizioni

Analisi del compito

- Capire le regole della disposizione delle bandierine e verificarle sul disegno.
- Continuare eventualmente il disegno (colorare le bandierine) per rendersi conto che oltrepasserà i limiti del foglio.
- Procedere con il disegno (scegliendo un'altra "scala" o sistemando le bandierine su diverse righe...) e fermarsi a 100 bandierine, poi contare le gialle e le blu (questa procedura rischia di portare ad errori di conteggio).

Oppure: lavorare in ambito numerico calcolando il numero di bandierine di ciascun colore ($1+2+3+4+\dots$), e constatare che è possibile anche arrivare a 36, o a 45, poi a 55, ...ma che non si arriva a 50 e che quindi non ci sarà lo stesso numero di bandierine dei due colori se si rispetta la regola con la quale si appendono le bandierine al filo.

- Rendersi conto, allora che $45 + 45 = 90$ e che mancano 10 bandierine per arrivare a 100 o ancora che $45 + 55 = 100$, cosa che corrisponde a 55 bandierine gialle e 45 bandierine blu.

Oppure: (sempre in ambito numerico), calcolare tappa per tappa il numero totale di bandierine e fermarsi quando si arriva a 100: $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \dots = 100$ annotando i calcoli successivi e i risultati parziali, in maniera organizzata (con il ricorso al colore, a disposizioni per righe e/o colonne, ...)

Per esempio, in una disposizione ("per adulti") tipo la seguente:

bandierine gialle:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
bandierine blu:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
somme successive per colore	1	3	6	10	15	21	28	36	45	
totali successivi	2	6	12	20	30	42	56	72	90	

In quest'esempio, si constata che ci sono 90 bandierine dopo aver disposto il gruppo delle 9 gialle e quello delle 9 blu e che il gruppo delle 10 gialle della tappa successiva permette di arrivare a 100.

- Trovare allora che ci saranno 55 bandierine gialle e 45 blu.

Soluzione

Risposta corretta e completa (55 bandierine gialle e 45 blu) con una descrizione chiara della procedura seguita (dettagli e calcoli, disegni, ...)

Livello: 3, 4

Origine: Udine

3. AUTOMOBILI E CAMION (Cat. 3, 4) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Leo e Giacomo collezionano modellini di automobili e di camion.

Leo ha lo stesso numero di automobili e di camion e propone a Giacomo di scambiare alcuni modellini.

Leo dà 8 automobili a Giacomo e Giacomo, in cambio, dà 3 camion a Leo.

Dopo lo scambio Leo ha 89 modellini tra automobili e camion.

Quante automobili aveva Leo prima dello scambio?

Spiegate come avete fatto a dare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

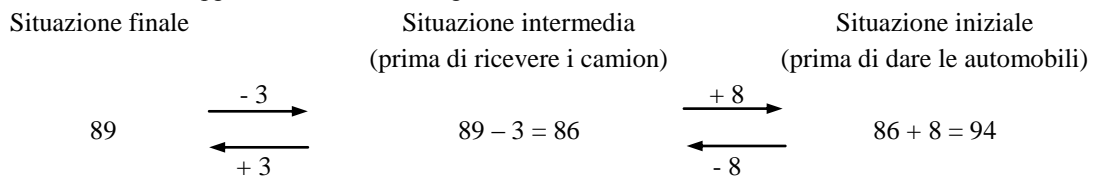
Ambito concettuale

- Aritmetica: addizione, sottrazione, metà di un numero

Analisi del compito

- Rendersi conto che il numero iniziale di automobili è uguale a quello dei camion e vicino alla metà di 89, quindi vicino a 45.
- Procedere per tentativi e aggiustamenti successivi fino ad arrivare a 47; $47 - 8 = 39$; $39 + 3 = 42$; $42 + 47 = 89$.

Oppure: ripercorrere tutte le tappe, dalla situazione dopo lo scambio alla situazione iniziale.



e dedurre che, poiché prima degli scambi il numero delle automobili era lo stesso di quello dei camion, Leo aveva inizialmente $47 (= 94 : 2)$ automobili e 47 camion.

Oppure: comprendere che $8 + 3 = 11$ è la differenza tra il numero delle automobili e quello dei camion dopo lo scambio.

Dedurre che $78 = 89 - 11$ è il doppio del numero delle automobili di Leo dopo lo scambio. Concludere quindi che il numero iniziale delle automobili di Leo era $47 = (78 : 2) + 8$.

Soluzione

Risposta giusta (47 automobili) ottenuta con tentativi e aggiustamenti successivi o con un ragionamento corretto (es. successione dei calcoli)

Livello: 3, 4

Origine: Bourg-en-Bresse

4. LA GARA DI NUOTO (Cat. 3, 4) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Bea, Tatiana, Silvia, Letizia e Debora hanno partecipato ad una gara di nuoto.

- Silvia e Bea non hanno vinto.
- Tatiana è arrivata tra le ultime due.
- Bea è arrivata immediatamente prima di Debora.
- Silvia è arrivata tra le prime due.

Chi ha vinto?

Indicate l'ordine di arrivo di ciascuna ragazza nella gara di nuoto.

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Logica: gestione di una relazione d'ordine e di condizioni di seriazione; interpretazione di proposizioni; formulazione di ipotesi e controllo della loro coerenza con le informazioni del testo

Analisi del compito

- Ricavare dalla prima e dalla quarta condizione che Silvia è arrivata seconda.
- Capire dalla terza condizione che Bea e Debora devono stare vicine e possono quindi trovarsi terza e quarta, oppure quarta e quinta.
- Poiché dalla seconda condizione, Tatiana è arrivata quarta o quinta, dedurre che Bea e Debora devono essere, rispettivamente, terza e quarta, mentre Tatiana è quinta.
- Concludere che Letizia ha vinto la gara.
- Scrivere l'elenco completo delle amiche, dalla prima all'ultima: Letizia, Silvia, Bea, Debora, Tatiana.

Oppure: procedere per tentativi per ordinare le posizioni, controllando che le informazioni del testo siano rispettate.

Oppure: ricavare dalla prima e dalla quarta condizione che Silvia è arrivata seconda e per il resto procedere per tentativi controllando che le informazioni del testo siano ben rispettate.

Soluzione

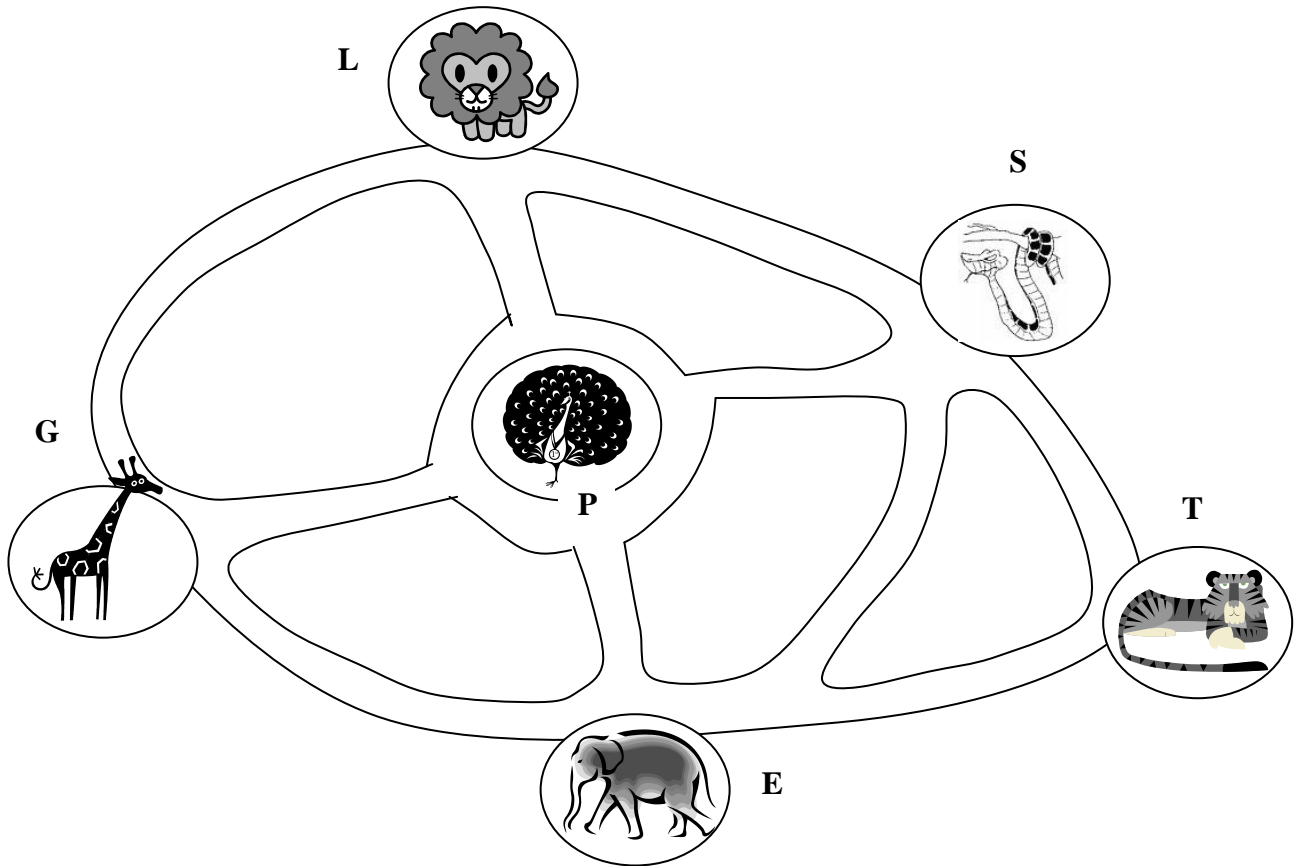
Risposta corretta («Letizia ha vinto») ed elenco corretto dell'ordine di arrivo: Letizia, Silvia, Bea, Debora, Tatiana), con giustificazione che tiene conto di tutte le indicazioni del testo

Livello: 3, 4

Origine: Rozzano

5. VISITA ALLO ZOO (Cat. 3, 4) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

I bambini di una classe fanno una gita allo zoo. Nelle gabbie dello zoo ci sono leoni (L), giraffe (G), pavoni (P), serpenti (S), elefanti (E) e tigri (T):



I bambini si ritrovano accanto alla gabbia dei leoni. Essi vogliono assolutamente andare a visitare gli elefanti, ma solo dopo aver visto le giraffe ed eventualmente qualche altro animale. Inoltre, nel loro cammino, non vogliono passare due volte dalla stessa gabbia.

Quanti sono i percorsi che i bambini possono fare per andare dalla gabbia dei leoni alla gabbia degli elefanti, passando davanti a quella delle giraffe?

Trovate tutte le possibilità e descrivetele chiaramente.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: individuazione di percorsi in una mappa, rispettando opportune condizioni

Analisi del compito

- Comprendere quali sono le condizioni che caratterizzano un percorso.
- Fare qualche tentativo sulla mappa alla ricerca di tali percorsi; rendersi conto che si trova facilmente il percorso più "breve" (L-G-E), ma che ci sono anche percorsi più "lungi" (es. L-P-G-E).
- Capire che per individuare tutti i percorsi possibili è necessario procedere in modo sistematico, organizzando la ricerca. Per esempio: partendo da L si può andare verso G, verso P o verso S. Andando verso G, si ottengono quattro percorsi possibili che differiscono tra loro per il numero di gabbie raggiunte: L-G-E; L-G-P-E; L-G-P-S-E e L-G-P-S-T-E. Andando verso P, c'è un solo percorso possibile che passa dalle giraffe, cioè L-P-G-E (ogni altro percorso del tipo L-P non raggiunge mai la gabbia delle giraffe prima di quella degli elefanti). Andando verso S, c'è di nuovo un unico percorso che raggiunge le giraffe prima degli elefanti, ovvero L-S-P-G-E.
- Concludere che i cammini possibili sono sei:

LGE	LPGE
LGPE	LSPGE
LGPSE	LGPSTE

Si può organizzare la ricerca dei percorsi anche per numero di gabbie che essi collegano.

Oppure: procedere in modo non organizzato, ma in questo caso è molto probabile che si perda qualcuno dei percorsi.

Soluzione

I sei percorsi corretti (L-G-E; L-G-P-E; L-G-P-S-E; L-G-P-S-T-E; L-P-G-E; L-S-P-G-E) descritti chiaramente senza errori (un errore è una ripetizione o un percorso errato)

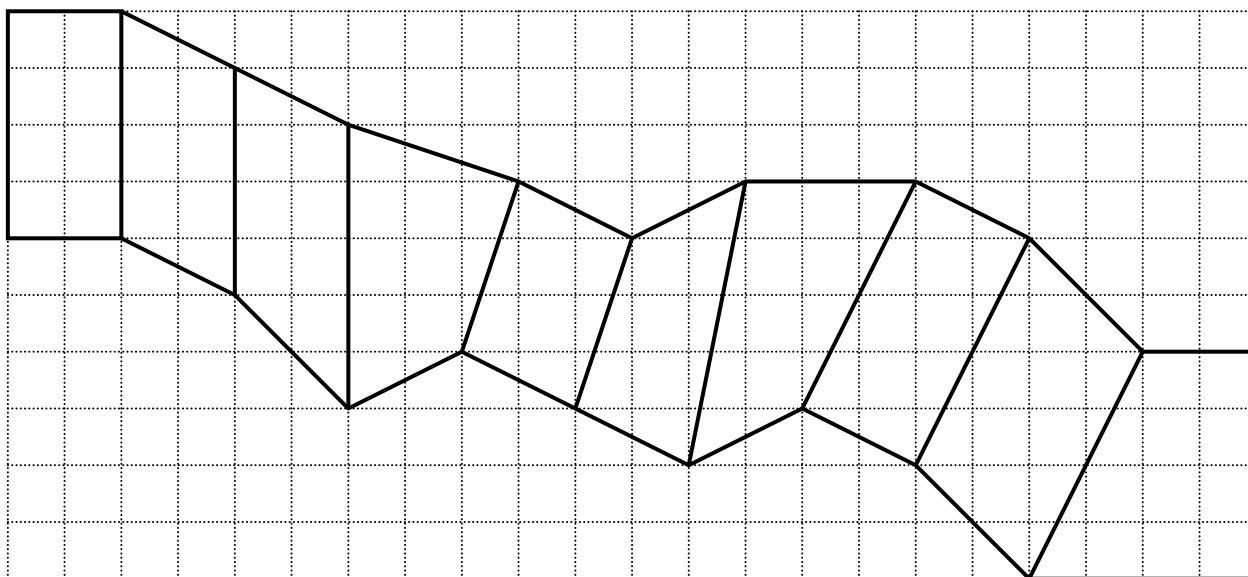
Livello: 3, 4

Origine: Lussemburgo

6. SUL MURO DELLA SCUOLA (I) (Cat. 4, 5) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Per decorare un muro della scuola, alcuni alunni hanno preparato un modello formato da 10 quadrilateri, su carta a quadretti, come nella figura che vedete qui sotto.

Luca dice: “Per colorarlo, potremmo usare pittura rossa per i rettangoli, pittura verde per i parallelogrammi non rettangoli e pittura gialla per tutti gli altri quadrilateri.”



Colorate il modello come ha proposto Luca.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: distinzione tra rettangolo e parallelogramma non rettangolo tramite le loro proprietà caratteristiche

Analisi del compito

- Esaminare i quadrilateri uno ad uno e constatare che il primo è un rettangolo perché i suoi lati sono disposti lungo la quadrettatura (lati opposti paralleli e congruenti e angoli retti facilmente individuabili come tali) ed è quindi da colorare di rosso.
- La figura 2 (se pensiamo le figure “numerare” idealmente, da sinistra a destra), i cui lati sono paralleli due a due, può essere paragonata al primo quadrilatero per vedere che è un parallelogramma non rettangolo da colorare di verde.
- Le figure 3 e 4, che non hanno entrambe le coppie di lati opposti paralleli, non sono dei parallelogrammi e dovranno essere colorate di giallo.
- Per la figura 5, i cui lati sono paralleli due a due, si deve guardare attentamente o utilizzare una squadretta per constatare che è un parallelogramma non rettangolo da colorare di verde.
- Constatare che le figure 6 e 7 non sono dei parallelogrammi perché hanno lati opposti non paralleli; dovranno quindi essere colorate di giallo.
- Constatare che la figura 8 è un rettangolo perché ha i lati opposti paralleli e congruenti e gli angoli retti e va colorato di rosso (anche qui è necessario l’uso di una squadretta).
- Per la figura 9, i cui lati sono paralleli due a due, si deve guardare attentamente (o forse utilizzare una squadretta) per constatare che è un parallelogramma non rettangolo da colorare di verde.
- La figura 10 non è un parallelogramma (è un trapezio rettangolo) e quindi da colorare di giallo.

Soluzione

4 Risposta corretta (rosso: 1, 8; verde: 2, 5, 9; giallo: 3, 4, 6, 7, 10)

Livello: 4, 5

Origine: Genova, Gruppo di lavoro «geometria piana»

7. AL SEMAFORO (Cat. 4, 5, 6) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Luca è fermo al semaforo ed osserva la targa dell'auto che lo precede.

Vede che, oltre alle lettere, ci sono tre numeri ad una cifra, uno accanto all'altro, tutti diversi tra loro e tali che:

- la loro somma è proprio il doppio del numero centrale,
- il primo numero è il doppio del terzo.

Quali possono essere i tre numeri che vede Luca?

Spiegate la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

Aritmetica: multipli (doppio, triplo); cifra e numero

Analisi del compito

- Rendersi conto che il primo numero è pari perché è il doppio del terzo e che, se la somma dei tre numeri è il doppio del numero centrale, quest'ultimo è la somma del primo e del terzo.
- Capire che il primo numero non può essere 0, perché altrimenti anche gli altri due sarebbero 0 (i tre numeri devono essere diversi).
- Trovare così le terne 2 - 3 - 1; 4 - 6 - 2; 6 - 9 - 3 e scartare la terna che inizia per 8 perché in questo caso la somma di 8 con la sua metà, 4, non è un numero ad una cifra.

Oppure: rendersi conto che, se la somma dei tre numeri è il doppio di quello centrale, allora la somma del primo e del terzo è uguale al secondo numero o anche che il triplo del terzo numero è uguale al secondo (per essere il primo numero doppio del terzo). Quindi il secondo numero deve essere un multiplo di 3, cioè 3 o 6 o 9, e di conseguenza le terne possibili sono 2 - 3 - 1 o 4 - 6 - 2 o 6 - 9 - 3.

Oppure: per tentativi, tenendo conto della condizione sul primo e terzo numero e scelta del secondo numero controllando che la prima condizione sia verificata.

Soluzione

4 Soluzione completa (2 - 3 - 1; 4 - 6 - 2; 6 - 9 - 3) con spiegazione chiara del ragionamento o elenco di tutte le possibilità

Livello: 4, 5, 6

Origine: Siena

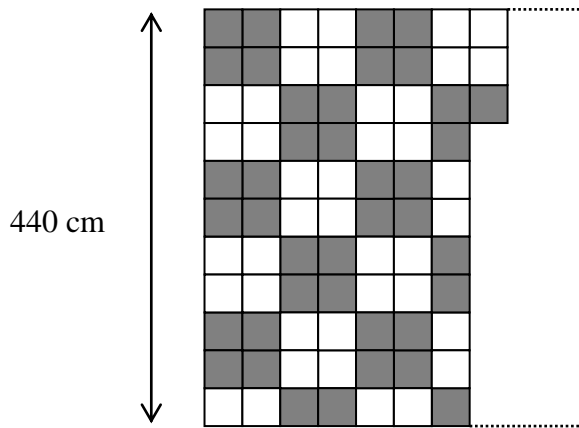
8. PAVIMENTAZIONE (I) (Cat. 5, 6) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Le dimensioni del pavimento di una stanza rettangolare sono 440 centimetri e 680 centimetri.

Si decide di pavimentare la stanza con piastrelle bianche e piastrelle grigie, tutte quadrate, secondo un motivo regolare.

Il piastrellista ha già sistemato 7 file complete di piastrelle e ne ha messe 3 nell'ottava fila.

Si riposa un po' e osserva che ha messo lo stesso numero di piastrelle grigie e di piastrelle bianche.



Quando la pavimentazione sarà terminata, ci sarà ancora lo stesso numero di piastrelle grigie e di piastrelle bianche?

Se non è così, dite se ci saranno più o meno piastrelle grigie di quelle bianche e quante di più o di meno.

Spiegate le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: moltiplicazione, addizione
- Geometria: rettangolo e quadrato
- Misura: unità di misura di lunghezza, proporzionalità tra lunghezze e numeri di quadretti

Analisi del compito

- Verificare l'affermazione del piastrellista contando i quadretti nella figura, percepire le regolarità nella disposizione dei quadretti grigi e bianchi.
- Cominciare a disegnare i quadretti a partire da quelli che sono già disegnati, per file, per gruppi, ... poi domandarsi dove ci si dovrà fermare e comprendere che questo avverrà quando saranno raggiunti i 680 cm.
- Stimare visivamente la lunghezza del rettangolo (eventualmente riportando la larghezza data: 440 cm, o 11 quadretti, e aggiungendo ad essa un po' più della sua metà) per arrivare a circa 680 cm di lunghezza, o fare un disegno in scala.
- Comprendere che c'è una relazione tra i 440 cm della larghezza, i 680 cm della lunghezza e i numeri di quadretti corrispondenti, e che si tratta di determinare la lunghezza di un lato del quadretto (che è la stessa sulle due dimensioni) a partire da 440 cm e 11 quadretti contati sulla larghezza: $440 : 11 = 40$ dà la lunghezza di un lato, poi $680 : 40 = 17$ dà il numero di quadretti nella lunghezza.
- Costatare che le nove file: 1 e 2, 5 e 6, 9 e 10, 13 e 14, e 17 hanno 6 quadretti grigi e 5 bianchi, cioè un totale di 54 grigi e 45 bianchi. Le altre otto file: 3 e 4, 7 e 8, 11 e 12, 15 e 16 hanno 5 quadretti grigi e 6 bianchi, per un totale di 40 grigi e 48 bianchi. La pavimentazione è dunque composta da 94 (54 + 40) quadretti grigi e da 93 (45 + 48) quadretti bianchi. Ci sono dunque più quadretti grigi che bianchi.

Oppure: disegnare la pavimentazione completa (su un altro foglio, o prolungando leggermente la lunghezza del rettangolo dell'enunciato per permettergli di contenere 17 file di quadretti) e contare i quadretti uno a uno, oppure a gruppi di quattro (che costituiscono un quadrato più grande dello stesso colore).

Oppure ancora: osservare visivamente che le prime quattro file hanno lo stesso numero di quadretti grigi e bianchi e che questo si ripeterà nelle file successive raggruppate per quattro fino alla 16-esima fila. E' allora sufficiente contare i

quadretti della 17-esima fila, identica alla prima, e constatare che contiene 6 quadretti grigi e 5 bianchi, per ottenere la risposta.

Ci sono anche altre procedure di calcolo o di conteggio, che non richiedono di conoscere il numero esatto di quadretti grigi e bianchi.

Soluzione

Risposta corretta e completa (1 quadretto grigio in più dei bianchi) con una spiegazione dettagliata (senza contraddizioni o errori) sulla maniera in cui la risposta è stata trovata (si veda l'analisi del compito)

Livello: 5, 6

Origine: Finale internazionale 2008, Gruppo proporzionalità

9. I SANDALI (Cat. 5, 6) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Nel retrobottega del suo negozio di scarpe, dove non c'è luce, Romeo ha un sacco contenente sandali dello stesso numero e dello stesso modello, ma di tre colori diversi, tutti mischiati tra loro.

Questo sacco contiene in tutto:

- 5 paia di sandali neri;
- 4 paia di sandali bianchi;
- 2 paia di sandali grigi.

Giulietta arriva trafelata e implora Romeo: «Presto, portami un paio di sandali dello stesso colore... non importa quale!».

Romeo si precipita verso il sacco e, a tentoni, ne prende rapidamente un certo numero, giusto quelli che gli servono per essere sicuro di avere un paio di sandali dello stesso colore.

Indicate il numero minimo di sandali che Romeo deve prendere per accontentare Giulietta.

Spiegate la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Aritmetica: conteggio
- Logica e ragionamento: differenza tra il «probabile» e il «certo»

Analisi del compito

- Capire che c'è differenza tra un sandalo sinistro e un sandalo destro.
- Capire che ci sono in tutto 11 sandali sinistri e 11 sandali destri.
- Capire che prendendone 11 o meno di 11, può succedere di essere così sfortunati da aver preso tutti i sandali sinistri o tutti i sandali destri.
- Dedurre che si può essere sicuri di avere un paio di sandali dello stesso colore solo se si prendono 12 sandali.

Soluzione

Risposta corretta (12) con spiegazione chiara

Livello: 5, 6

Origine: Svizzera romanda

10. PULIZIE (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

I 18 allievi della classe di Giovanna e i 24 allievi della classe di Patrizio hanno pulito la piazza del villaggio e le rive del ruscello.

Il panettiere, molto contento, porta loro 28 pacchetti di biscotti per ringraziarli.

Giovanna propone che ogni classe prenda 14 pacchetti.

Patrizio dice che non è giusto perché nella sua classe ci sono più allievi.

Quanti pacchetti dovrà ricevere ciascuna classe perché la ripartizione sia equa?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Aritmetica: ripartizione proporzionale

Analisi del compito

- Comprendere che si tratta di suddividere i 28 pacchetti tenendo conto del numero di allievi di ciascuna classe e che la suddivisione 14 | 14 in parti uguali non è «giusta», visto che ci sono più allievi nella classe di Patrizio.
- Immaginare le differenti ripartizioni di 28 che permettono di fare la corrispondenza con 18 e 24, numero di allievi di ciascuna classe, e constatare che ci sono più possibilità: 13 | 15; 12 | 16; 11 | 17; 10 | 18; 9 | 19 ; ... fra le quali bisognerà scegliere.

Eventualmente pensare alla suddivisione 11 | 17 che dà 6 pacchetti di differenza come tra 18 e 24 allievi e rifiutare questa ipotesi perché non darebbe lo stesso numero di pacchetti per allievo ($11/18 \neq 17/24$).

- Constatare che i 28 pacchetti sono da ripartire tra i $18 + 24 = 42$ allievi delle due classi e che bisogna appoggiarsi su questi due numeri (28 per i pacchetti e 42 per gli allievi) per arrivare ad una ripartizione equa; poi immaginare le corrispondenze pensando che «equa» potrebbe voler dire «stesso numero di biscotti per allievo» dopo la ripartizione dei pacchetti tra le due classi.

Numero di allievi	42	24	18
-------------------	----	----	----

Numero di pacchetti	28	?	?
---------------------	----	---	---

- Procedere ai calcoli necessari evitando una procedura come «sottrarre 14» dalla quale si otterrebbero 10 e 4 nella seconda riga (che suddividerebbe 14 pacchetti invece di 28).

A seconda delle loro precedenti pratiche scolastiche, gli allievi possono passare attraverso il rapporto $42/28 = 1,5$ o aggiungendo una corrispondenza intermedia come 21 e 14 prendendo la metà di 42 e 28, poi 3 e 2 dividendo per 7 i numeri precedenti, poi «risalendo» a 24 e a 16 moltiplicando per 8, e a 18 e 12 moltiplicando per 3.

Oppure: notare che $24/42 = 4/7$ e dedurre che il numero di pacchetti di biscotti che riceverà la classe di Patrizio deve essere $4/7$ di 28, cioè 16 pacchetti e quindi il numero di pacchetti che riceverà la classe di Giovanna sarà $28 - 16 = 12$.

Oppure: osservare che il numero degli allievi delle classi (24 e 18) permette di formare gruppi di 6 allievi e si avrebbero pertanto in totale 7 gruppi (4 e 3) quindi gli allievi possono essere ripartiti in 7 gruppi, cosa che permetterebbe una ripartizione di 4 pacchetti per gruppo.

Dare la risposta 12 pacchetti per la classe di Giovanna e 16 per la classe di Patrizio e scrivere le giustificazioni.

Soluzione

Risposta esatta (12 - 16) con il dettaglio della suddivisione e le operazioni corrispondenti

Livello: 5, 6, 7

Origine: 9° RMT F, Gruppo proporzionalità

11. GIOCHI SULLA SPIAGGIA (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Oggi, sulla spiaggia, Anna, Bianca e Carla hanno giocato a bocce con i loro amici, Dario, Franco e Giorgio.

Alla fine del gioco, Dario ha ottenuto 4 punti, Franco 2 e Giorgio 3. Le bambine invece hanno totalizzato insieme 19 punti. In particolare:

- Anna ha realizzato lo stesso punteggio di uno dei bambini;
- Bianca ha ottenuto il doppio dei punti di uno degli altri due bambini;
- Carla ha ottenuto il triplo dei punti del bambino che resta.

Quanti punti può aver ottenuto ciascuna delle tre bambine?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizione, sottrazione fra numeri naturali; doppio e triplo di un numero
- Logica: gestione contemporanea di più condizioni; organizzazione sistematica di un inventario

Analisi del compito

- Appropriarsi delle condizioni date nell'enunciato e provare a procedere per tentativi ed errori per ottenere una ripartizione corretta dei punti tra le tre ragazze, con il rischio di non trovare tutte le soluzioni.

Oppure: dopo i primi tentativi, comprendere che è necessario procedere in modo sistematico per tenere conto di tutte le possibilità che si presentano.

- Organizzare la ricerca studiando ogni possibilità per le tre ragazze cominciando da Anna che ha potuto ottenere 4 punti (punteggio di Dario), 2 punti (punteggio di Franco) o 3 punti (punteggio di Giorgio).

Con i 4 punti di Dario per Anna, si hanno due casi possibili:

- 1) Bianca ha ottenuto 4 punti (il doppio dei punti di Franco) e Carla ha allora fatto 9 punti (il triplo dei punti di Giorgio), la somma fa 17 e questo non va bene.
- 2) Bianca ha fatto 6 punti (il doppio dei punti di Giorgio) e allora Carla avrebbe fatto 6 punti (il triplo dei punti di Franco), la somma fa 16 e non va bene.

Con i 2 punti di Franco per Anna, si hanno due casi possibili:

- 1) Bianca ha fatto 8 punti (il doppio dei punti di Dario) e allora Carla ha fatto 9 punti (il triplo dei punti di Giorgio), la somma fa 19 e va bene.
- 2) Bianca ha fatto 6 punti (il doppio dei punti di Giorgio) e allora Carla avrebbe fatto 12 punti (il triplo dei punti di Dario), la somma fa 20 e non va bene.

Con i 3 punti di Giorgio per Anna, si hanno due casi possibili:

- 1) Bianca ha fatto 8 punti (il doppio dei punti di Dario) e allora Carla ha fatto 6 punti (il triplo dei punti di Franco), la somma fa 17 e non va bene.
- 2) Bianca ha fatto 4 punti (il doppio dei punti di Franco) e allora Carla avrebbe fatto 12 punti (il triplo dei punti di Dario), la somma fa 19 e va bene.

- Concludere che ci sono due soluzioni: 2 punti per Anna, 8 punti per Bianca, 9 punti per Carla, oppure 3 punti per Anna, 4 punti per Bianca, 12 punti per Carla.

Oppure, fare uno schema (o una tabella) che rappresenti il ragionamento precedente, come per esempio il seguente:

	4 (Dario)		2 (Franco)		3 (Giorgio)	
Bianca (doppio)	4 (Franco)	6 (Giorgio)	8 (Dario)	6 (Giorgio)	8 (Dario)	4 (Franco)
Carla (triplo)	9 (Giorgio)	6 (Franco)	9 (Giorgio)	12 (Dario)	6 (Franco)	12 (Dario)
Totale	17	16	19	20	17	19

Oppure, fare una tabella contenente tutti i punteggi possibili delle ragazze a partire dai punti dei tre ragazzi:

	Dario	Franco	Giorgio
Anna	4	2	3
Bianca	8	4	6
Carla	12	6	9

- In seguito alle condizioni dell'enunciato, si devono considerare le terne formate dai numeri disposti su 3 righe e 3 colonne diverse e la cui somma è 19. Tra le 6 terne possibili ci sono le due soluzioni indicate nella tabella: 2 punti per Anna, 8 punti per Bianca, 9 punti per Carla, oppure 3 punti per Anna, 4 punti per Bianca, 12 punti per Carla.

Soluzione

Risposta corretta (Anna 2 punti, Bianca 8 punti e Carla 9 punti, oppure Anna 3 punti, Bianca 4 punti e Carla 12 punti) con spiegazione chiara e completa (tabella, schema o dettaglio dei calcoli,...)

Livello: 5, 6, 7

Origine: Siena

12. IL PREZZO DI UNA PENNA (Cat. 5, 6, 7, 8) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Andrea compra una penna. Paga con una moneta da 2 euro e la cassiera gli dà due monete di resto. Beatrice compra tre penne dello stesso prezzo di quella di Andrea. Le paga con un biglietto da 5 euro e la cassiera dà anche a lei due monete di resto.

Quale può essere il prezzo di una penna?

Spiegate come avete fatto per trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Aritmetica: addizione e sottrazione, conoscenza delle monete
- Combinatoria

Analisi del compito

- Stilare l'inventario delle otto monete in centesimi di euro (1, 2, 5, 10, 20, 50) e in euro (1, 2).
- Osservare che una penna deve costare meno di 1,67 euro (perché 3 penne costano meno di 5 euro) e che quindi la cassiera ha dato di resto ad Andrea, su 2 euro, più di 33 centesimi.
- Trovare le combinazioni di 2 monete che fanno una somma superiore a 33 centesimi. Ce ne sono 13:
 $1 + 50 = 51$; $1 + 100 = 101$; $2 + 50 = 52$; $2 + 100 = 102$; $5 + 50 = 55$; $5 + 100 = 105$; $10 + 50 = 60$;
 $10 + 100 = 110$; $20 + 20 = 40$; $20 + 50 = 70$; $20 + 100 = 120$; $50 + 50 = 100$; $50 + 100 = 150$.
- Calcolare i 13 prezzi corrispondenti, poi il triplo di ciascuno di essi e il resto su 5 euro:

resto, in centesimi, su 2 euro	40	51	52	55	60	70	100	101	102	105	110	120	150
prezzo di 1 penna	160	149	148	145	140	130	100	99	98	95	90	80	50
prezzo di 3 penne	480	447	444	435	420	390	300	297	294	285	270	240	150
resto su 5 euro	20	53	56	65	80	110	200	203	206	215	230	260	350
- Tra questi 13 resti trovare quelli che possono essere dati con due monete. Ce ne sono solo tre:
 $20 = 10 + 10$; $110 = 100 + 10$ e $200 = 100 + 100$.
- Redigere la risposta e spiegare il procedimento che conduce all'esaustività.
 Il prezzo di una penna può dunque essere

Costo penna in euro	Resto con 2 euro	Resto con 5 euro
1,60	2 monete da 20 centesimi	2 monete da 10 centesimi
1,30	20 e 50 centesimi	1 euro e 10 centesimi
1	2 monete da 50 centesimi	2 monete da 1 euro

Oppure: tentativi a caso che possono permettere di trovare una o due possibilità, o anche tutte e tre, ma che non assicurano l'esaustività.

Soluzione

Le tre possibilità (1,60 euro; 1,30 euro e 1 euro) con un procedimento chiaro che permette di vedere che non ce ne sono altre

Livello: 5, 6, 7, 8

Origine: Bourg-en-Bresse (da un'idea dell'IREM di Toulouse)

13. SUL MURO DELLA SCUOLA (II) (Cat. 6, 7, 8) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Per decorare un muro della scuola, gli alunni di una classe hanno preparato un modello formato da 10 quadrilateri, su carta a quadretti, come nella figura che vedete qui sotto.

Luca dice:

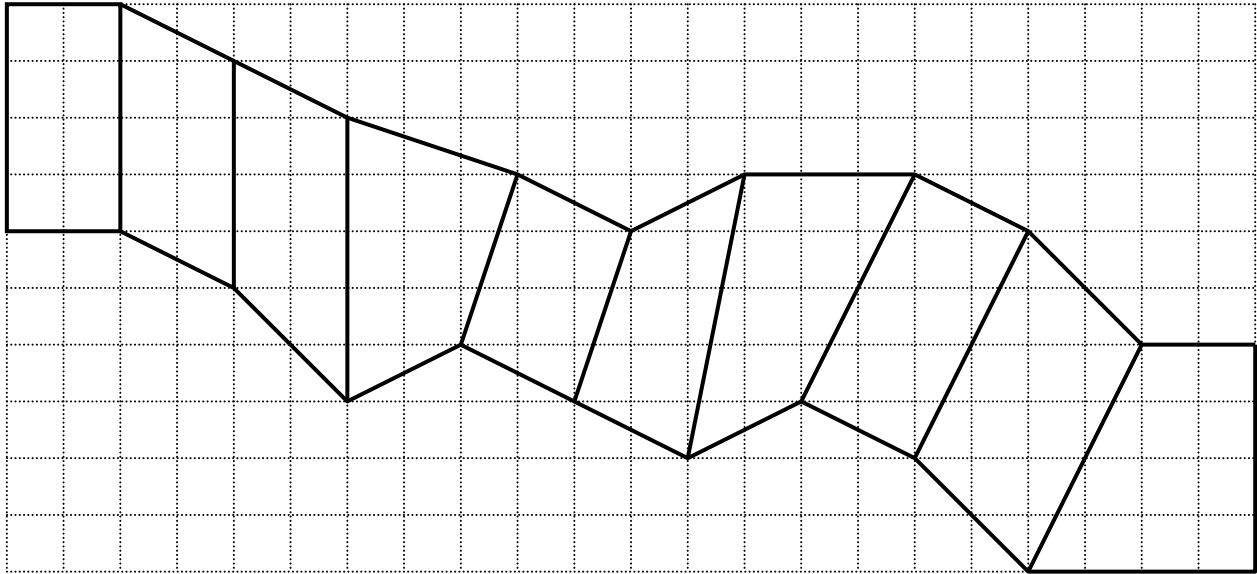
- “Per colorarlo, potremmo usare pittura rossa per i rettangoli, pittura verde per i parallelogrammi non rettangoli e pittura gialla per tutti gli altri quadrilateri.”

Gli alunni si dividono i quadrilateri da colorare e Luigi osserva:

- “Io ho da colorare il quadrilatero più grande di tutti!”

Lucilla ribatte:

- “Il mio è grande quanto il tuo.”



Colorate il modello come ha proposto Luca.

Quali sono i quadrilateri che Luigi e Lucilla coloreranno?

Spiegate le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

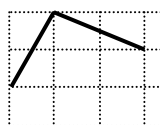
Ambito concettuale

- Geometria: distinzione tra rettangolo, parallelogramma non rettangolo, trapezio e quadrilatero tramite le loro proprietà caratteristiche; confronto di aree

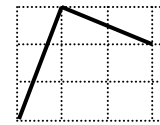
Analisi del compito

- Esaminare i quadrilateri uno ad uno e constatare che il primo è un rettangolo, da colorare di rosso, perché i suoi lati sono disposti sulla quadrettatura (lati opposti paralleli e congruenti e angoli retti facilmente individuabili come tali).
- La figura 2, i cui lati sono paralleli a due a due, può essere confrontata con la prima per arrivare a stabilire che è un parallelogramma non rettangolo da colorare di verde.
- Le figure 3 e 4, che non hanno entrambe le coppie di lati opposti paralleli, non sono parallelogrammi e saranno colorate di giallo.
- Per la figura 5, i cui lati sono paralleli a due a due, bisogna guardare bene o utilizzare una squadretta per constatare che è un parallelogramma non rettangolo da colorare di verde. Un ragionamento sugli angoli permette di provarlo:

Questo angolo è retto
(angoli complementari
nella quadrettatura)



Questo non può
esserlo



- Constatare che le figure 6 e 7 non sono parallelogrammi perché hanno i lati opposti non paralleli e quindi saranno gialle.

- Analoghe argomentazioni mostrano che la figura 8 è un rettangolo rosso, mentre la figura 9 è un parallelogramma non rettangolo verde.
- La figura 10 è visibilmente un trapezio che non è un parallelogramma e quindi è da dipingere di giallo.
- Per quanto riguarda le aree: le figure da prendere in considerazione sono visibilmente le figure 4, 7, 9 e 10. Capire che è inutile calcolare le aree delle altre figure.
 - La misura dell'area della figura 4 è 9 (in quadratini), per esempio: 6 quadratini interi, un semiretangolo di due quadratini e due semirettagli di 3 quadratini.
 - La misura dell'area della figura 7 è 10,5 (in quadratini), per esempio: considerare il rettangolo "circoscritto" che contiene 20 quadratini meno: un semiretangolo da 5, un semiretangolo da 2, un semiretangolo da 8 e un rettangolo da 2.
 - La misura dell'area del parallelogramma 9 misura 12 (in quadratini), per esempio: la sua diagonale principale divide in due triangoli uguali di base 6 lati di quadrato unitario e di altezza 2.
 - La misura dell'area del trapezio 10 misura 12 (in quadratini), per esempio: il suo lato obliquo dimezza un rettangolo di 8 quadratini.
- Concludere che le figure 1 e 8 saranno dipinte di rosso, le figure 2, 5 e 9 di verde e le figure 3, 4, 6, 7 e 10 di giallo.
- Luigi e Lucilla dovranno dipingere i quadrilateri 9 e 10.

Soluzione

Risposta corretta e completa (1 e 8 di rosso; 2, 5 e 9 di verde; 3, 4, 6, 7 e 10 di giallo; 9 e 10 devono essere dipinte da Luigi e Lucilla), con spiegazioni chiare per i colori a partire dalle proprietà del rettangolo e del parallelogramma ed un confronto corretto delle aree di 9 e 10

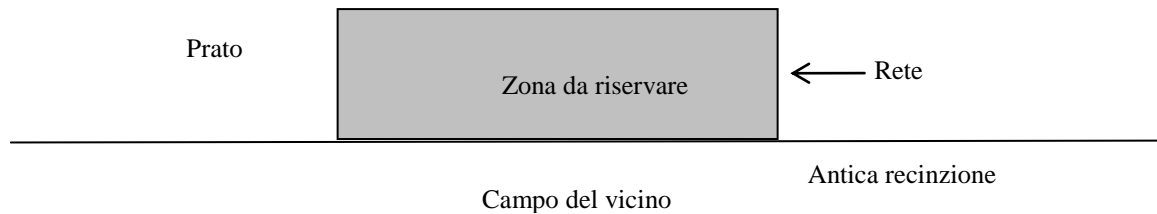
Livello: 6, 7, 8

Origine: Genova, Gruppo di lavoro «geometria piana»

14. IL PRATO DI ZIO FRANCESCO (I) (Cat. 7, 8) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Zio Francesco possiede un prato che confina con il campo di un vicino; un'antica recinzione rettilinea separa le due proprietà. Per sperimentare una nuova semina, zio Francesco vuole riservare nel suo prato una zona rettangolare di 42 m^2 confinante con la proprietà del vicino (vedere la figura).

Per evitare che i suoi animali, che si spostano liberamente per il prato, vadano a calpestare la nuova piantagione, vuole sistemare una rete metallica che formi gli altri tre lati della zona rettangolare da riservare. Egli dispone di una rete lunga 20 m che vuole utilizzare tutta (vedere la figura). Per semplificare le misure delle lunghezze, desidera che siano espresse da numeri interi di metri.



Quali saranno le misure dei lati della zona rettangolare da riservare?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Aritmetica: divisibilità e calcolo di una condizione lineare
- Geometria e misura: perimetro ed area di un rettangolo

Analisi del compito

- Ricordarsi che l'area di un rettangolo è uguale al prodotto della lunghezza per la larghezza.
- Cercare le coppie di divisori interi (a, b) di 42 che verificano $a + 2b = 20$. A tale scopo, si può costruire una tabella di calcolo analoga alla seguente:

a	2	3	6	7	14	21
b	21	14	7	6	3	2
$a + 2b$	44	31	20	19	20	25

- Concludere che zio Francesco ha due possibilità se vuole utilizzare interamente i suoi 20 m di rete: fare un recinto "quasi quadrato" di 6 m di larghezza e di 7 m di lunghezza, oppure un recinto molto allungato di 14 m di lunghezza e di 3 m di larghezza.
- Potrebbe anche fare un lato lungo 7 m e gli altri due lunghi 6 m con 19 m di rete, ma egli vuole utilizzare interamente i 20 m.

Soluzione

Le due coppie di soluzioni (6 m e due volte 7 m, oppure 14 m e due volte 3 m), con una spiegazione chiara del procedimento ed una ricerca esaustiva delle possibilità

Livello: 7, 8

Origine: Gruppo funzioni

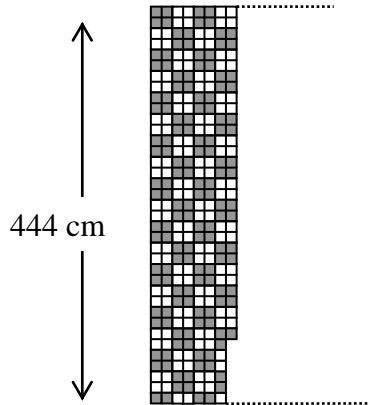
15. PAVIMENTAZIONE (II) (Cat. 7, 8, 9) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Le dimensioni del pavimento di una stanza rettangolare sono 444 centimetri e 684 centimetri.

Si decide di pavimentare la stanza con piastrelle bianche e piastrelle grigie, tutte quadrate, secondo un motivo regolare.

Il piastrellista ha già sistemato 7 file complete di piastrelle e ne ha messe 31 nell'ottava fila.

Si riposa un po' e osserva che ha messo lo stesso numero di piastrelle grigie e di piastrelle bianche.



Quando la pavimentazione sarà terminata, ci sarà ancora lo stesso numero di piastrelle grigie e di piastrelle bianche?

Se non è così, dite se ci saranno più o meno piastrelle grigie di quelle bianche e quante di più o di meno.

Spiegate le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: moltiplicazione, addizione
- Geometria: rettangolo e quadrato
- Misura: unità di misura di lunghezza, proporzionalità tra distanze e numeri di quadretti

Analisi del compito

- Verificare l'affermazione del piastrellista contando i quadretti nella figura, percepire le regolarità nella disposizione dei quadretti grigi e bianchi.
- Rendersi conto che non si arriverà a disegnare tutti i quadretti perché sono troppi e, eventualmente, provare a disegnarli a gruppi di quattro dello stesso colore.
- Stimare visivamente la lunghezza del rettangolo (eventualmente riportando la larghezza data: 444 cm, o 37 quadretti, e aggiungendo ad essa un po' più della sua metà) per arrivare a circa 684 cm di lunghezza, o fare un disegno in scala.
- Comprendere che c'è una relazione tra i 444 cm della larghezza, i 684 cm della lunghezza e i numeri di quadretti corrispondenti, e che si tratta di determinare la lunghezza di un lato del quadretto (che è la stessa sulle due dimensioni) a partire da 444 cm e 37 quadretti contati sulla larghezza: $444 : 37 = 12$ dà la lunghezza di un lato, poi $684 : 12 = 57$ dà il numero di quadretti nella lunghezza.
- Calcolare il numero di quadretti di ciascun colore nel rettangolo riga per riga, o per gruppi di quattro o in altro modo ancora, tenendo presente le irregolarità dovute ai numeri dispari.

Per esempio: considerare che in un rettangolo di $36 \times 56 = 2016$ quadretti, si hanno 1008 bianchi e 1008 grigi, poi contare i quadretti della 37-esima riga (28 bianchi e 29 grigi) poi quelli che restano nella 57-esima colonna (18 bianchi e 18 grigi) per arrivare ad un totale di $1008 + 28 + 18 = 1054$ bianchi e $1008 + 29 + 18 = 1055$ grigi e alla risposta: un quadretto grigio in più dei bianchi.

Ci si può anche convincere che il numero dei bianchi non può essere uguale al numero dei grigi per ragioni di parità: $37 \times 57 = 2109$ è un numero dispari. Il numero di colonne (57) è dispari, l'ultima riga della quadrettatura all'estremità destra della stanza terminerà, come sul disegno, con 2 grigi e 1 bianco, il resto è costituito da tanti quadretti grigi che bianchi. Ci sarà dunque un quadretto grigio in più dei quadretti bianchi.

Ci sono ancora numerose procedure di calcolo o di conteggio, che non necessitano tutte di conoscere il numero esatto dei quadretti grigi e bianchi.

Soluzione

Risposta corretta e completa (1 quadretto grigio in più dei bianchi) con una spiegazione dettagliata (senza contraddizioni o errori) sulla maniera in cui la risposta è stata trovata (si veda l'analisi del compito)

Livello: 7, 8, 9

Origine: Finale internazionale 2008, Gruppo proporzionalità

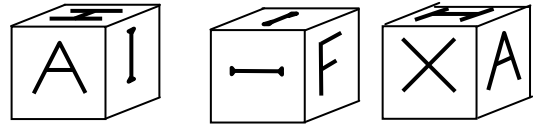
16. IL CUBO (Cat. 7, 8, 9, 10) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Roberto ha costruito un cubo.

Ha scritto una lettera su ogni faccia.

Poi ha fotografato il suo cubo in diverse posizioni.

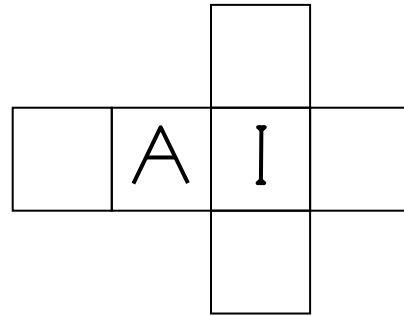
Ecco tre di queste fotografie:



Carlo ha trovato molto interessante il cubo del suo amico Roberto e ha deciso di costruirne uno esattamente uguale per sé.

Egli ha preparato un modello del suo cubo con le sei facce, che piegherà e incollerà con nastro adesivo trasparente.

Ha già disegnato le lettere A e I su due delle facce.



Disegnate le lettere delle altre quattro facce del cubo di Carlo, in modo che siano esattamente nelle stesse posizioni che sul cubo di Roberto.

Esistono più possibilità di porre le lettere su queste quattro facce?

Se sì, fate un disegno per ogni possibilità.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Geometria solida: visualizzazione spaziale, passaggio dalle 3 dimensioni alle 2 dimensioni e viceversa

Analisi del compito

- Osservare che le lettere sulle facce sono A, H, I, F, X e che la lettera I appare due volte.
- Capire che dalla prima alla terza foto (se sono prese dalla stessa angolazione), il cubo è ruotato nel senso antiorario di 90 gradi, osservando che la lettera A “è passata” sulla faccia laterale di destra e che la lettera H ha anche subito una rotazione di 90 gradi.
- Osservare che la lettera A può essere utile come riferimento visto che figura su due foto e sullo sviluppo; a destra di A, sullo sviluppo e sulla prima foto, c'è una lettera I. Queste due lettere permettono di determinare la faccia sulla quale si trova la lettera H e la posizione di tale lettera: la I e la H hanno un asse verticale (di lettura) sullo stesso piano per quanto riguarda l'oggetto “cubo” e sulla stessa retta per quanto riguarda il modello.

Dalla terza foto, la X è sulla faccia a sinistra di A. Sarà dunque a sinistra di A sullo sviluppo.

- Poiché sono così completate le quattro caselle A, I, H e X, restano due caselle libere per l'altra I e per F (figura 1)

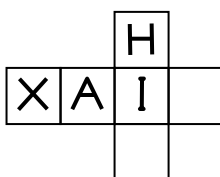


figura 1

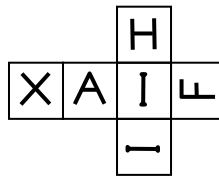


figura 2

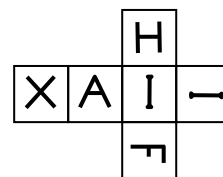


figura 3

- Si presentano allora due possibilità e bisogna osservare la seconda foto, che mostra le tre facce I, I, F, dove le due I non sono sullo stesso piano, ma su due rette sghembe ortogonali e, di conseguenza, saranno su due rette perpendicolari sullo sviluppo:
 - se si mette la seconda lettera I nella casella sotto la prima I, la lettera F sarà sulla casella di destra nella posizione descritta nella figura 2. (In questo caso, la prima I, al centro dello sviluppo, è quella della faccia superiore sulla seconda foto);
 - se si mette la seconda lettera I nella casella a destra della prima I, la lettera F sarà sulla casella in basso nella posizione descritta nella figura 3. (In questo caso, la prima I, al centro dello sviluppo, è quella della faccia di fronte sulla seconda foto).

Oppure: ritagliare un modello sul quale posizionare le due lettere A e I, poi completare una a una le quattro facce per successivi tentativi mirati ed infine verificare le condizioni iniziali ripiegando il cubo.

Soluzione

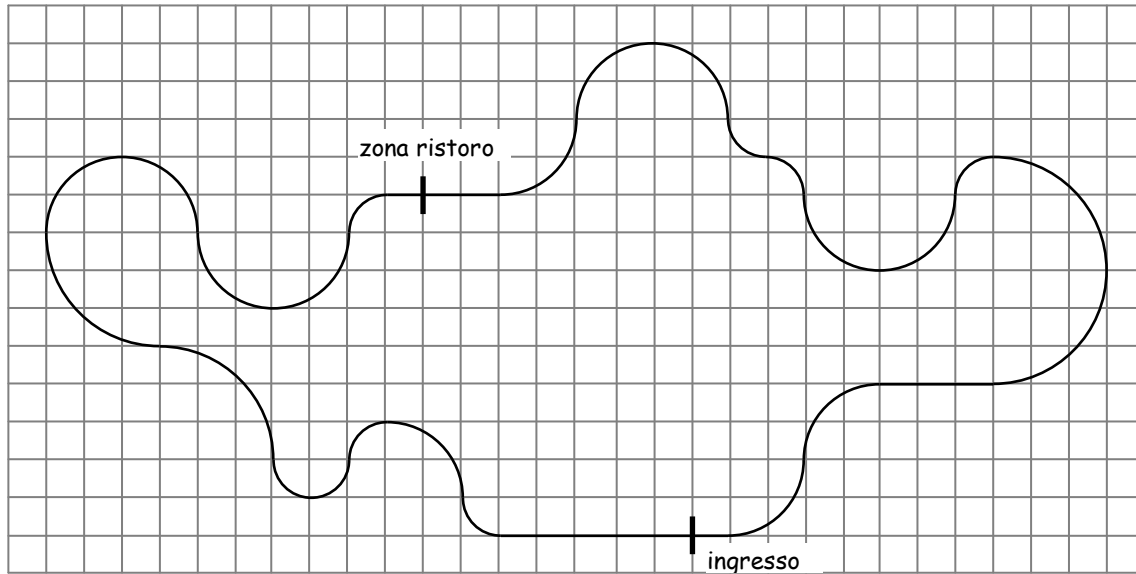
Le due soluzioni (figure 2 e 3) con le lettere sulle facce “corrette” e ben orientate

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: 2° RMT e “Gruppo geometria solida”

17. IL KARTODROMO (Cat. 8, 9, 10) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Quello che vedete raffigurato nel disegno è la mappa di un circuito per le corse dei Go-Kart. Quando il circuito non è utilizzato per le gare, vi si può camminare.



Luigi ed Enrico vogliono stabilire se sia più conveniente percorrere il circuito in senso orario o in senso antiorario per raggiungere la zona ristoro, a partire dall'ingresso. Decidono così di camminare, alla stessa velocità, partendo ciascuno dall'ingresso, ma Luigi andrà in senso orario ed Enrico in senso antiorario.

Chi arriverà per primo alla zona ristoro?

Giustificate la vostra risposta ed esplicitate i vostri calcoli.

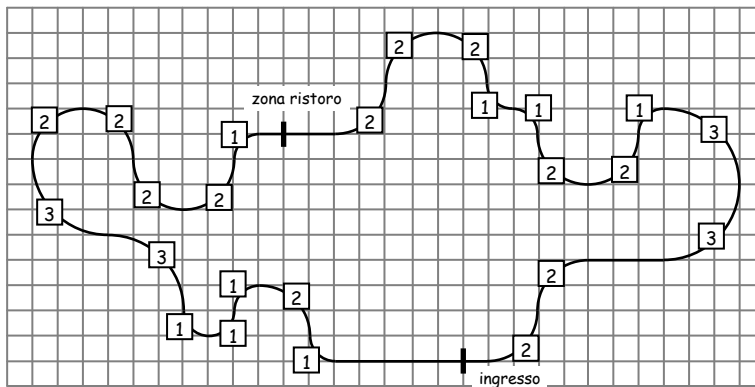
ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: circonferenza e archi di circonferenza; confronto di lunghezze
- Aritmetica: proporzionalità

Analisi del compito

- Notare che il circuito è formato da tratti diritti e da una successione di quarti di circonferenze di raggi differenti.
- Capire che, prendendo come unità il lato di un quadratino, i raggi di queste circonferenze misurano 1, 2, 3 unità. Si può allora fare il conteggio degli archi di circonferenze con questi raggi diversi:



- Comprendere che la lunghezza di un quarto di circonferenza, come quella della circonferenza, è proporzionale al suo raggio. Ciò permette di rapportare alla lunghezza di un quarto di circonferenza di raggio 1 l'insieme delle parti curve del circuito.

- Per esempio, per il percorso di Luigi in senso orario, si devono conteggiare 6 lati di quadratino unitario e le parti curve che danno luogo a 5 archi di raggio 1, 5 archi di raggio 2 e 2 archi di raggio 3, ovvero ad una lunghezza uguale a $5 + 5 \times 2 + 2 \times 3 = 21$ quarti di circonferenza di raggio 1.
- Per il percorso di Enrico, in senso antiorario si hanno ugualmente 6 lati di quadratino unitario e 3 archi di raggio 1, 7 archi di raggio 2 e 2 archi di raggio 3, ovvero una lunghezza uguale a $3 + 7 \times 2 + 2 \times 3 = 23$ quarti di circonferenza di raggio 1.
- Concludere che Luigi arriverà primo.

Oppure, senza proporzionalità: notare che i due amici hanno ciascuno 6 lati di quadratino unitario e 2 quarti di circonferenza di raggio 3 in comune; rimangono da calcolare le restanti lunghezze da percorrere:

$$\text{per Luigi, } 5 \times 2\pi/4 + 5 \times 4\pi/4 = 15\pi/2$$

$$\text{per Enrico, } 3 \times 2\pi/4 + 7 \times 4\pi/4 = 17\pi/2$$

- Concludere che Luigi ha il percorso più corto e arriverà primo.

Soluzione

Risposta corretta (Luigi) con spiegazione esauriente

Livello: 8, 9, 10

Origine: Siena

18. LA SAGA DEI QUADRATI (Cat. 8, 9, 10) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

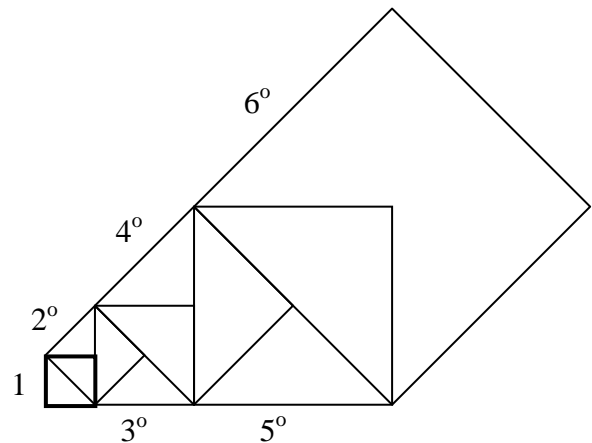
Carlo si diverte a disegnare dei quadrati.

A partire da un quadrato di lato 1 cm, disegna il secondo in modo che abbia un lato coincidente con una delle diagonali di questo quadrato, il terzo con un lato coincidente con la diagonale del secondo e così via. La figura mostra i primi sei quadrati disegnati da Carlo.

Quale è la lunghezza del lato dell'undicesimo quadrato che ha disegnato Carlo?

Quale sarebbe quella del lato del centesimo quadrato se Carlo potesse disegnarlo?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.



ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: quadrato e sue proprietà; diagonale del quadrato e Teorema di Pitagora
- Aritmetica: progressione geometrica
- Algebra: calcolo letterale

Analisi del compito

- Osservare come sono formati i quadrati successivi: il primo, il terzo, il quinto, etc, cioè quelli di posto “dispari”, si susseguono nella stessa posizione del primo, mentre il secondo, il quarto, il sesto, etc., cioè quelli di posto pari, si susseguono nella stessa posizione del secondo, “obliquamente”.
- Per trovare la lunghezza del lato del 2° quadrato, calcolare la lunghezza della diagonale del primo e trovare quindi che misura $\sqrt{2}$ cm con il Teorema di Pitagora, oppure ricordarsi la relazione tra lato l e diagonale d di un quadrato:

$$d = l\sqrt{2}.$$

- Per trovare la lunghezza del lato del 3° quadrato, si può procedere sia con l'applicazione del Teorema di Pitagora (o direttamente con la relazione lato e diagonale di un quadrato) per arrivare a trovare $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ cioè 2 (in cm), sia con una quadrettatura della figura (quadretto unità coincidente con il primo quadrato) dalla quale si evince che il terzo quadrato è costituito da quattro quadrati di lato 1 cm. In sostanza il lato del terzo quadrato è il doppio del lato del primo quadrato.
- Per trovare la lunghezza del lato del quarto quadrato, si può sia moltiplicare il lato del terzo per $\sqrt{2}$, oppure, tramite la quadrettatura della figura, capire che il quarto quadrato è formato da otto quadrati unità e che quindi la lunghezza del lato vale $\sqrt{8}$ cm = $2\sqrt{2}$ cm.
- Continuare sulla stessa falsariga e organizzare i dati in una tabella, per esempio del tipo seguente fino all'undicesimo quadrato:

quadrato	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°
lato	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	16	$16\sqrt{2}$	32
lato con potenze di 2	2^0	$\frac{2^0}{\sqrt{2}}$	2^1	$2^1\sqrt{2}$	2^2	$\frac{2^2}{\sqrt{2}}$	2^3	$2^3\sqrt{2}$	2^4	$2^4\sqrt{2}$	2^5

Osservare pertanto che la lunghezza del lato dell'undicesimo quadrato è 32 cm.

- Dalla tabella, si può notare che l'esponente della potenza di 2 è la metà del numero d'ordine dei quadrati meno 1: per esempio, nel caso dell'undicesimo quadrato, la potenza di 2 è $5 = (11 - 1)/2$.
- Capire che, se si proseguisse la tabella,

N°. Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	99	100
Lato	2^0	$2^0\sqrt{2}$	2^1	$2^1\sqrt{2}$	2^2	$2^2\sqrt{2}$	2^3	$2^3\sqrt{2}$	2^4	$2^4\sqrt{2}$	2^5	...	2^{49}	$2^{49}\sqrt{2}$

“sotto” il 99° quadrato si avrebbe 2^{49} e che quindi, “sotto” il 100° si avrebbe $2^{49}\sqrt{2}$. Quindi il lato del centesimo quadrato misura $2^{49}\sqrt{2}$ cm.

Oppure: comprendere che le misure delle lunghezze dei lati dei quadrati “dispari” sono in una progressione geometrica di ragione 2, di primo termine 1 (ovvero, la lunghezza del lato di un quadrato “dispari” di rango $2k + 1$ è ottenuta

moltiplicando 2 per se stesso k volte). Tenendo presente tale progressione, la lunghezza del lato dell'undicesimo quadrato si può esprimere come: $2^5 = 32$ (in cm).

- Osservare poi come si “comportano” i lati dei quadrati “pari”. In effetti capire che la successione delle misure delle lunghezze dei lati dei quadrati “pari” sono in progressione geometrica di ragione 2, di primo termine la lunghezza della diagonale del primo quadrato (ovvero, la lunghezza del lato di un quadrato di lato «pari» di rango $2k$ è ottenuta moltiplicando la lunghezza della diagonale del quadrato unitario per il prodotto di 2 per se stesso $k-1$ volte).
- Calcolare la lunghezza del lato del centesimo quadrato: $\sqrt{2} \times 2^{49}$ cm.

Soluzione

Le due risposte corrette (32 cm e $\sqrt{2} \times 2^{49}$ cm) con spiegazione chiara (tabelle, descrizione della procedura, ...) (si può ammettere come risposta corretta per la 100-esima figura una scrittura ottenuta con la calcolatrice del tipo: $7,961\dots \times 10^{14}$)

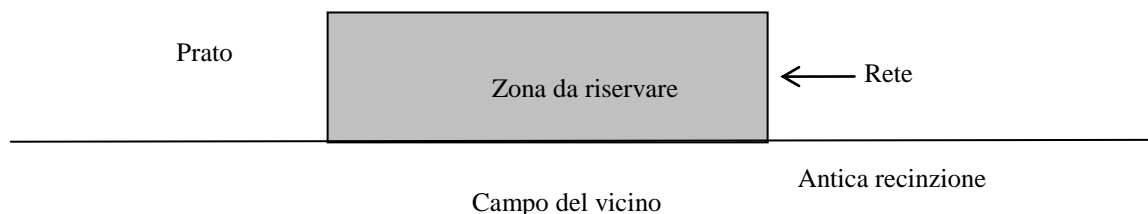
Livello: 8, 9, 10

Origine: Gruppo Zeroallazero

19. IL PRATO DI ZIO FRANCESCO (II) (Cat. 9, 10) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Zio Francesco possiede un prato che confina con il campo di un vicino; un'antica recinzione rettilinea separa le due proprietà. Per sperimentare una nuova semina, zio Francesco vuole riservare nel suo prato una zona rettangolare di 40 m^2 confinante con la proprietà del vicino (vedere la figura).

Per evitare che i suoi animali, che si spostano liberamente per il prato, vadano a calpestare la nuova piantagione, vuole sistemare una rete metallica che formi gli altri tre lati della zona rettangolare da riservare. Egli dispone di una rete lunga 20 m che vuole utilizzare tutta (vedere la figura).



Quali saranno, approssimate al decimetro, le misure dei lati della zona rettangolare da riservare?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: radici quadrate, approssimazione
- Algebra: calcolo letterale, coppia di equazioni, funzioni, equazioni di secondo grado
- Geometria e misura: perimetro ed area di un rettangolo

Analisi del compito

- Scegliere le due variabili in gioco: x per la lunghezza del lato del rettangolo parallelo alla vecchia recinzione e y per la larghezza. L'area della zona da riservare è $A = xy$.
- Scrivere le condizioni: $xy = 40$ e $x + 2y = 20$. Sostituire, per esempio, y nella seconda relazione con il valore $40/x$ trovato dalla prima, ed ottenere $x + 80/x = 20$, da cui infine l'equazione $x^2 - 20x + 80 = 0$.
- Risolvere questa equazione per approssimazioni successive con l'aiuto di una tabella, effettuando per ogni valore provato il calcolo del valore della funzione $x^2 - 20x + 80$. Comprendere che si "racchiude" una soluzione quando il risultato cambia di segno.
- Prima tabella con valori interi:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x^2 - 20x + 80$	61	44	29	16	5	-4	-11	-16	-19	-20	-19	-16	-11	-4	5

Si rileva l'esistenza di una soluzione tra 5 m e 6 m e un'altra tra 14 m e 15 m.

- Per dare una risposta approssimata al dm, si effettuano gli stessi calcoli tra questi valori procedendo di decimi in decimi.
- Prima soluzione:

x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
$x^2 - 20x + 80$	5	4,01	3,04	2,09	1,16	0,25	-0,64	-1,51	-2,36	-3,19	-4

Si trova così la soluzione $x = 5,5 \text{ m}$ e $y = 7,3 \text{ m}$ approssimata al decimetro.

- Seconda soluzione:

x	14	14,1	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9	15
$x^2 - 20x + 80$	-4	-3,19	-2,36	-1,51	-0,64	0,25	1,16	2,09	3,04	4,01	5

Si trova così la soluzione $x = 14,5 \text{ m}$ e $y = 2,8 \text{ m}$ approssimata al decimetro.

Oppure: risolvere l'equazione per radicali scrivendo $x^2 - 20x + 80 = (x - 10)^2 - 20 = 0$ ed ottenere i due valori

$$x_1 = 10 - \sqrt{20} = 5,528 \text{ e } x_2 = 10 + \sqrt{20} = 14,472.$$

Da cui i valori cercati, approssimati al dm: $x = 5,5 \text{ m}$ e $y = 7,3 \text{ m}$; $x = 14,5 \text{ m}$ e $y = 2,8 \text{ m}$.

Soluzione

Le due coppie di soluzioni (5,5 m e due volte 7,3 m oppure 14,5 m e due volte 2,8 m), con spiegazione chiara per ottenere l'equazione e una presentazione del procedimento di approssimazione, oppure la risoluzione per radicali

Livello: 9, 10

Origine: Gruppo funzioni

20. GITA IN BICICLETTA (Cat. 9, 10) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Due amici, Giovanni e Pietro, partono insieme una domenica mattina alle ore 8 per una gita di 100 km in bicicletta. Giovanni viaggia a 20 km/h e Pietro a 30 km/h.

Pietro fora malamente al 50-esimo km e si ferma per andare a cercare una gomma da sostituire. In tutto perde 1 h 20 mn prima di poter ripartire. Alla fine, i due amici riescono a completare i 100 km stabiliti.

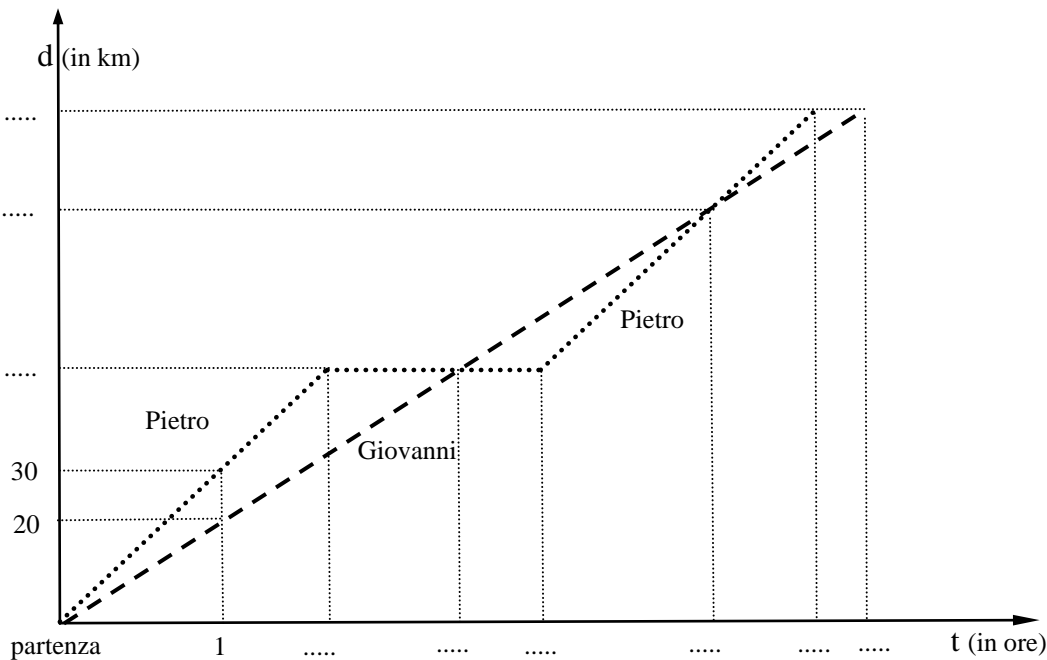
A che ora Giovanni raggiunge Pietro che era andato avanti?

A che ora Giovanni è arrivato al traguardo dei 100 km? E Pietro?

Pietro, dopo la sua foratura, sorpassa Giovanni? Se sì a che ora?

Spiegate i calcoli che avete fatto.

La situazione è rappresentata dal seguente grafico, che potrebbe essere utile completare:

**ANALISI A PRIORI****Ambito concettuale**

- Geometria e misura: tempo e velocità, calcoli orari
- Geometria e rappresentazione grafica: rappresentazione cartesiana di uno spazio in funzione del tempo

Analisi del compito

- Notare che tutte le domande si riferiscono alla cronologia della storia. Si deve pertanto descrivere tutto in termini di orari.
- Alla velocità media di 30 km/h, Pietro ha percorso 50 km in 1 h e 40 mn (30 km in un ora e 20 km in 2/3 di ora).
- Al momento della foratura, Pietro deve ancora fare 50 km, ovvero gli mancano ancora 1 h e 40 mn al traguardo dei 100 km.
- Pietro impiega 1 h e 20 mn per riparare la bicicletta. Egli quindi riparte 3 h (1 h e 40 mn + 1 h e 20 mn) dopo l'inizio della gita e pertanto impiega 4 h e 40 mn per percorrere i 100 km. Egli arriva alle 12 h e 40 mn.
- Alla velocità media di 20 km/h, Giovanni percorre 50 km in 2 h e 30 mn. Egli dunque raggiunge Pietro alle 10 h e 30 mn.
- Giovanni impiega 5 ore per percorrere i 100 km della gita. Egli arriva alle ore 13, cioè 20 mn dopo Pietro.
- Si può calcolare l'ora in cui Pietro sorpassa Giovanni utilizzando le equazioni orarie dei loro spostamenti (d_G e d_P).
 - Per Giovanni: $d_G = 20 t$.
 - Per Pietro, dopo 50 km, 3 ore dopo la loro partenza della mattina: $d_P = 30 (t - 3) + 50$.
 - L'ora in cui Pietro sorpassa Giovanni è allora data dall'equazione $20 t = 30 (t - 3) + 50$, da cui $t = 4$ ore. Pietro ha superato Giovanni a mezzogiorno. Essi avevano allora percorso 80 km.

Oppure: utilizzare il grafico per stimare le coordinate del punto di incontro: ora e distanza percorsa (4 ore, 80 km)

Oppure: fare un ragionamento più elementare grazie alla semplicità dei dati.

- Quando Pietro è ripartito alle ore 11, Giovanni aveva fatto 60 km (3 ore a 20 km/h). Pietro aveva dunque uno svantaggio di 10 km. In un'ora egli percorre 30 km, mentre Giovanni fa solo 20 km. Pietro quindi ha sorpassato Giovanni un'ora dopo essere ripartito, a mezzogiorno. In quel momento Giovanni aveva fatto 80 km.

Soluzione

Risposte corrette (10 h 30 mn; arrivo di Giovanni alle ore 13, arrivo di Pietro alle ore 12 e 40 min; Pietro sorpassa Giovanni a mezzogiorno), con spiegazioni chiare alle prime tre risposte e un metodo coerente per l'ultima

Livello: 9, 10

Origine: Gruppo funzioni

21. IL LINGOTTO D'ORO (Cat. 9, 10) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Carlo ha un bel lingotto d'oro a forma di parallelepipedo rettangolo a base quadrata di 5 cm di lato. Possiede anche un recipiente cubico i cui lati interni sono della stessa lunghezza del lingotto.

Egli pone il lingotto nel recipiente su una delle sue facce rettangolari e versa dell'acqua finché essa arriva esattamente al livello della faccia superiore del lingotto (Figura 1).

Poi Carlo pone il lingotto in piedi su una delle sue basi quadrate (Figura 2). Egli osserva che l'altezza dell'acqua nel recipiente è adesso di 4 cm.

Figura 1

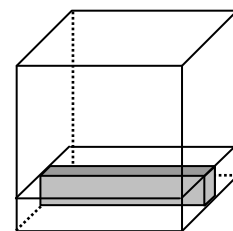
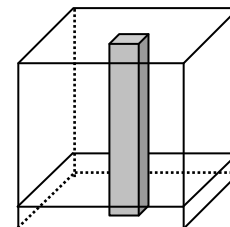


Figura 2



Quale volume d'acqua ha versato Carlo nel recipiente?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta e mostrate i calcoli che avete fatto.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Algebra: messa in equazione; trinomio di secondo grado, risoluzione per tentativi
- Geometria e misura: parallelepipedo rettangolo, cubo, volumi

Analisi del compito

- Osservare che il volume d'acqua che Carlo ha versato è uguale al volume occupato nel recipiente da un'altezza d'acqua di 5 cm, meno il volume del lingotto (posizione 1), e che è anche uguale al volume occupato da un'altezza di 4 cm d'acqua nel recipiente nella posizione 2.
- Il calcolo di questi volumi conduce a scegliere la lunghezza l del lingotto come incognita. Il volume d'acqua che Carlo ha versato è uguale a $5l^2 - 25l$ (posizione 1).
- Il volume occupato da un'altezza di 4 cm d'acqua nel recipiente nella posizione 2 è uguale a $4(l^2 - 25)$.
- Nelle due posizioni, il volume dell'acqua non è cambiato, si ha dunque $5l^2 - 25l = 4(l^2 - 25)$.
- Comprendere che la lunghezza del lingotto è superiore a 5 cm e procedere per tentativi numerici confrontando i volumi dell'acqua nelle due posizioni.

Lunghezza del lingotto	Volume dell'acqua nella posizione 1	Volume dell'acqua nella posizione 2	Differenza
6	30	44	14
7	70	96	26
8	120	156	36
...			
19	1330	1344	14
20	1500	1500	0

- Concludere che Carlo ha versato 1500 cm^3 d'acqua, ovvero un litro e mezzo.

Oppure: procedere algebricamente. L'uguaglianza del volume dell'acqua calcolato nelle due posizioni porta all'equazione $5l^2 - 25l = 4(l^2 - 25)$. In alternativa, comprendere che il volume della parte non immersa del lingotto in posizione 2, $25(l - 4)$, è uguale al volume l^2 di una parte del recipiente di altezza 1 cm. Da cui l'equazione $l^2 = 25l - 100$. Risolvere l'equazione di secondo grado con la formula risolutiva, oppure, nel primo caso, utilizzando il calcolo algebrico, scrivere $5l^2 - 25l = 4(l^2 - 25)$ da cui $5l(l - 5) = 4(l^2 - 25)$ ed arrivare a $(l - 5)(l - 20) = 0$.

- Ottenere le due soluzioni $l = 5 \text{ cm}$ e $l = 20 \text{ cm}$ ed eliminare il valore 5 perché altrimenti il lingotto sarebbe un cubo.
- Calcolare il volume dell'acqua che Carlo ha versato: $5l^2 - 25l = 5 \times 20^2 - 25 \times 20 = 1500 \text{ cm}^3$, ovvero un litro e mezzo.

Soluzione

Risposta corretta (1500 cm^3 o 1,5 litri) con spiegazioni complete (tentativi organizzati o risoluzione di un'equazione)

Livello: 9, 10 **Origine:** Gruppo permanente problemi (GPP)

22. L'ULTIMA CARTA (Cat. 10) ©ARMT 2010 - 18° - II prova

Un gioco ha le seguenti regole: due giocatori prendono a turno una, due o tre carte da un mazzo che inizialmente ne contiene 20. Il giocatore che prende l'ultima carta perde.

Lucia e Anna decidono di giocare una partita. Anna dice a Lucia «Vuoi cominciare tu?».

Carla, che è molto forte in questo tipo di giochi di strategia, dice a Lucia: «Rifletti bene, tu puoi vincere a colpo sicuro!».

Lucia si rende conto di poter scegliere tra:

- lasciar cominciare Anna
- cominciare prendendo una carta
- cominciare prendendo due carte
- cominciare prendendo tre carte.

**Se voi foste al posto di Lucia, cosa scegliereste di fare?
Spiegate perché e con quali mosse Lucia potrà vincere.**

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale**

- Logica: analisi di un gioco e scoperta di una strategia vincente

Analisi del compito

- Appropriarsi delle regole del gioco e giocare qualche partita.
- Costatare che il primo giocatore ha tre possibilità alla prima mossa, che anche il secondo ha tre possibilità per la seconda mossa, che il primo ha sempre tre possibilità per la terza mossa e che si deve rinunciare a stendere l'inventario di tutti i possibili svolgimenti della partita perché questi sarebbero troppo numerosi.
- Farsi l'idea che l'esito della partita si decida in prossimità delle ultime mosse, quando restano poche carte e analizzare la situazione in quel caso, mettendosi dal punto di vista del vincitore (che è ciò che si vuole fare) o del perdente (che è ciò che non si vuole fare):
 - se si lascia **1** carta all'avversario si è vinto,
 - per ottenere **1** carta (da lasciare all'avversario), si deve partire da 2 carte (togliendone 1), da 3 carte (togliendone 2) o da 4 carte (togliendone 3);
 - se si parte da **5**, si arriva sicuramente a 4, o a 3, o a 2 carte (le situazioni precedenti da cui è possibile ottenere 1 carta).
- Si devono dunque lasciare **5** carte all'avversario (che sarà obbligato a lasciarvi 4, 3 o 2 carte, permettendovi di lasciargliene **1**).
- Dal momento che le situazioni **1** e **5** carte sono riconosciute come «vincenti» per colui che le lascia all'avversario, si deve ricominciare l'analisi precedente a partire da **5** (al posto di **1**) e concludere che se si lasciano **9** carte all'avversario, si vince a colpo sicuro. (Eventualmente, per consolidare questa convinzione, si possono giocare delle partite con **9** carte, considerando le tre mosse possibili dell'avversario verso 8, 7 e 6 carte e constatare che si è certi di poter ottenere **5** carte a partire da ciascuna di queste tre situazioni, e poi **1**).
- Rendersi conto allora della ripetitività dell'analisi e dedurre che le situazioni **13** e **17** carte lasciate all'avversario sono ugualmente vincenti.
 - Dedurre che, poiché si possono ottenere direttamente **17** carte a partire da **20**, togliendone tre, Lucia deve scegliere di cominciare la partita prendendo alla **prima mossa tre carte** (altrimenti è Anna che potrebbe raggiungere 17 alla prima mossa e quindi vincere).
- Spiegare l'analisi precedente (in modo discorsivo, con uno schema, con un diagramma,...)

Soluzione

Risposta completa e corretta (Lucia deve cominciare per prima prendendo 3 carte e poi lasciare ad Anna successivamente **13, 9, 5, 1** carta) con spiegazioni chiare e complete

Livello: 10

Origine: Gioco del Nim «elementare»